Idéaux premiers et idéaux maximaux - TD 5

1. Vrai ou faux (si vrai, il faut une preuve ; si faux, il faut un contre-exemple) ?
(a) L'idéal (x) est un idéal premier de $\mathbb{Q}[x]$;
(b) L'idéal (x) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$;
(c) L'idéal (x) est un idéal maximal de $\mathbb{Q}[x]$;
(d) L'idéal (x) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$.

2. Vrai ou faux (si vrai, il faut une preuve ; si faux, il faut un contre-exemple) ?
(a) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}$;
(b) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$;
(c) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$;
(d) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$;
(e) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$;
(f) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[i]$.

3. Montrer que $(2, x)$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$ de 2 façons.

4. Montrer que $(2x)$ n'est pas un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$ de 2 façons.

5. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si S est intègre, montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un idéal premier de R.

6. Soit $f : R \to S$ un épimomorphisme d'anneaux et soit I un idéal de R tel que $\mathrm{Ker} f \subseteq I$. Si I est premier (resp. maximal), alors $f(I)$ est premier (resp. maximal).

7. Soient I, J des idéaux de R tels que $I \subseteq J$. Montrer que :
(a) l'idéal J/I de R/I est premier si et seulement si J est premier ;
(b) l'idéal J/I de R/I est maximal si et seulement si J est maximal .

8. Soit R un anneau fini. Montrer que tout idéal premier de R est maximal.